DURÉE : 4 heures

MATHEMATIQUES 1

Dans tout le problème le mot *fonction* est mis pour *fonction continue* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On désigne par q une fonction fixée vérifiant

$\forall x \in \mathbb{R} \quad q(x) \geqslant 0$, et, $\exists x \in \mathbb{R} \quad q(x) \neq 0$

Pour toute fonction f, on désigne par (E_f) l'équation différentielle

$$y'' - qy = f$$

et par $\mathcal{S}_f$ l'ensemble des fonctions qui sont solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_f).

On désigne de même par (E) l'équation $y'' - qy = 0$

et par $\mathcal{S}$ l'ensemble de ses solutions sur $\mathbb{R}$.

On note φ (resp. ψ) l'élément de $\mathcal{S}$ vérifiant

$\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$ (resp. $\psi(0) = 0$ et $\psi'(0) = 1$)

Enfin, pour l dans $\mathbb{R}$, on note y_l l'élément de $\mathcal{S}$ vérifiant

$$y_l(0) = 1 \quad \text{et} \quad y_l'(0) = l$$

I

1° *a*. Montrer que, si y appartient à $\mathcal{S}$, y^2 est une fonction convexe.

Que peut-on dire de la restriction d'une fonction y de $\mathcal{S}$ à un intervalle de $\mathbb{R}$ si y garde un signe constant sur cet intervalle?

b. Démontrer que le seul élément de $\mathcal{S}$ qui soit une fonction bornée est la fonction identiquement nulle.

2° *a*. Démontrer

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) \geqslant 1$$

b. Démontrer

$$\forall x \geqslant 0 \quad \psi(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \forall x \leqslant 0 \quad \psi(x) \leqslant 0$$

puis

$$\forall x \geqslant 0 \quad \psi(x) \geqslant x \quad \text{et} \quad \forall x \leqslant 0 \quad \psi(x) \leqslant x$$

c. Montrer que $\frac{\varphi}{\psi}$ est strictement décroissant sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

3° On pose

$$\lambda = -\lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

a. Montrer $\forall x \in \mathbb{R} \quad y_\lambda(x) > 0$

b. Montrer

$$\forall x_0 > 0 \quad \forall x \in [0, x_0] \quad \varphi'(x) \leqslant \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)} \psi'(x)$$

(on pourra introduire la fonction $\varphi - \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}\psi$).

c. En déduire

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y_\lambda'(x) \leqslant 0$$

4° Montrer de façon analogue qu'il existe un réel μ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y_\mu(x) > 0 \quad \text{et} \quad y_\mu'(x) \geqslant 0$$

Démontrer que μ est strictement plus grand que λ.

5° Exprimer y_μ en fonction de y_λ, λ et μ (on pourra poser $y_\mu = C\, y_\lambda$ et déterminer la fonction C). En déduire

$$\forall x \geqslant 0 \quad y_\mu(x)\, y_\lambda(x) \leqslant 1 + (\mu - \lambda)\, x$$

6° Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y_\mu(x)\, y_\lambda(x) \leqslant 1 + (\mu - \lambda)\, |x|$$

Tournez la page S. V. P.

II

On considère une fonction f.

1° Montrer que, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ est convergente, la fonction

$$h(x) = \frac{1}{\lambda - \mu}\left[y_\lambda(x) \int_{-\infty}^{x} y_\mu(t)\, f(t)\, dt + y_\mu(x) \int_{x}^{+\infty} y_\lambda(t)\, f(t)\, dt \right]$$

est bien définie et appartient à E_f.

2° Montrer que, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{-\infty} |x f(x)|\,dx$ est convergente, la fonction h précédente est une fonction bornée.

3° En déduire que, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x f(x)|\,dx$ est convergente, (E_f) admet une et une seule solution bornée.

III

On suppose, dans cette partie, que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, q(x)\,dx$ est convergente.

1° Montrer

$$\lim_{x \to -\infty} x \int_{x}^{+\infty} q(t)\,dt = 0$$

puis démontrer que l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} \left[\int_{x}^{+\infty} q(t)\,dt \right] dx$ est convergente.

2° Soit y une fonction de classe C^2, bornée sur $[0, +\infty[$ et vérifiant

$$\forall x \geqslant 0 \quad y''(x) - q(x)\, y(x) \geqslant 0$$

a. Montrer

$$\forall x \geqslant 0 \qquad y'(x) + \int_{x}^{+\infty} q(t)\, y(t)\,dt \leqslant 0$$

b. En déduire que l'intégrale

$$\int_{0}^{+\infty} x\,[y''(x) - q(x)\, y(x)]\,dx$$

est convergente.

3° Soit f une fonction telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0 \qquad \text{et l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, f(x)\,dx \text{ diverge.}$$

Montrer que l'équation (E_f) n'admet pas de solution bornée.

IV

On suppose

$$\forall x \in \mathbb{R}\ q(x) = 1$$

Donner l'exemple de deux fonctions f_1 et f_2 vérifiant les mêmes conditions que la fonction f de III 3° et telles que (E_{f_1}) admette une solution bornée et (E_{f_2}) n'admette pas de solution bornée.